ENSAE - 3ème année

MESURES DE RISQUE

**Examen 2012**

*Durée : 2 heures. Sans document.*

Certains résultats de l'exercice 1 peuvent être utilisés dans l'exercice 2.

**Exercice 1 :** Soit des constantes $a$, $b$ et une variable aléatoire réelle $X$. On définit le quantile d'ordre $\alpha$ de $X$, $0 < \alpha < 1$, par

$$F_X^-(\alpha) = \inf\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\}.$$

On pose $Y = a + be^X$.

1. Montrer que dans le cas $b \geq 0$ les fonctions quantile de $X$ et $Y$ sont liées par
$$F_Y^-(\alpha) = a + be^{F_X^-(\alpha)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$
*On pourra utiliser le fait que $F^-(\alpha) \leq x$ si et seulement si $\alpha \leq F(x)$, avec des notations évidentes.* Le résultat est évidemment vrai pour $b = 0$, donc on suppose $b > 0$. Notons que le support de $Y$ est $[a, \infty[$. Pour tout $x > a$, on a
$$\begin{aligned} F_Y^-(\alpha) \leq x \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha \leq P\left(a + be^X \leq x\right) = F_X\left(\log\{(x-a)/b\}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad F_X^-(\alpha) \leq \log\left\{(x-a)/b\right\} \Leftrightarrow a + be^{F_X^-(\alpha)} \leq x, \end{aligned}$$
d'où le résultat.

2. Comment sont reliées les fonctions quantile dans le cas $b \leq 0$ et $X$ symétrique (*i.e.* $X$ et $-X$ ont même loi) ?
On peut supposer $b < 0$. Le support de $Y$ est maintenant $]-\infty, a]$. Pour tout $x < a$, on a
$$\begin{aligned} F_Y^-(\alpha) \leq x \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha \leq P\left(X \geq \log\{(x-a)/b\}\right) = F_X\left(-\log\{(x-a)/b\}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad F_X^-(\alpha) \leq -\log\left\{(x-a)/b\right\} \Leftrightarrow a + be^{-F_X^-(\alpha)} \leq x, \end{aligned}$$
d'où
$$F_Y^-(\alpha) = a + be^{-F_X^-(\alpha)}.$$

3. Comment sont reliées les fonctions quantile dans le cas $b < 0$ et $F_X$ continue et strictement croissante ?

   On a $F_Y$ qui est continue et strictement croissante sur $]-\infty, a]$. Pour tout $\alpha \in (0,1)$, $F_Y^-(\alpha) = F_Y^{-1}(\alpha)$ est défini par
$$\alpha \quad = \quad P\left\{a + be^X \leq F_Y^{-1}(\alpha)\right\} = 1 - P\left(X < \log\{(F_Y^{-1}(\alpha) - a)/b\}\right).$$
   D'où
$$F_Y^-(\alpha) = a + be^{F_X^-(1-\alpha)}.$$

4. On suppose dans cette question que $X$ prend les valeurs $x_0$ et $x_1$ avec les probabilités $p$ et $1-p$, où $x_1 > x_0$ et $0 < p \leq 1/2$.

   (a) Déterminer
$$F_X^-(\alpha), \quad -e^{-F_X^-(\alpha)}, \quad F_{-e^X}^-(\alpha), \quad F_X^-(1-\alpha), \quad \text{et} \quad -e^{F_X^-(1-\alpha)}$$
   pour tout $0 < \alpha < 1$.

   Ces fonctions sont déterminées par le tableau suivant :

| $\alpha$ | $0$ | | $p$ | | $1-p$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_X^-(\alpha)$ | | $x_0$ | $x_0$ | $x_1$ | $x_1$ | $x_1$ | |
| $-e^{-F_X^-(\alpha)}$ | | $-e^{-x_0}$ | $-e^{-x_0}$ | $-e^{-x_1}$ | $-e^{-x_1}$ | $-e^{-x_1}$ | |
| $F_{-e^X}^-(\alpha)$ | | $-e^{x_1}$ | $-e^{x_1}$ | $-e^{x_1}$ | $-e^{x_1}$ | $-e^{x_0}$ | |
| $F_X^-(1-\alpha)$ | | $x_1$ | $x_1$ | $x_1$ | $x_0$ | $x_0$ | |
| $-e^{F_X^-(1-\alpha)}$ | | $-e^{x_1}$ | $-e^{x_1}$ | $-e^{x_1}$ | $-e^{x_0}$ | $-e^{x_0}$ | |

   (b) A quelles conditions a-t-on $F_{-e^X}^-(\alpha) \neq -e^{-F_X^-}(\alpha)$ ? L'égalité n'est possible que si $p = 1/2$ et $x_1 = -x_0$.

   (c) Pour quelle valeur de $\alpha$ a-t-on $F_{-e^X}^-(\alpha) \neq -e^{F_X^-}(1-\alpha)$ ? L'inégalité a lieu pour $\alpha = 1 - p$.

5. On suppose maintenant que $Y = g\left(\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{X}\right)$, où $g$ est continue et croissante de $\mathbb{R}$ dans $]c, \infty[$, où $[c, \infty[$ est le support de la loi de $Y$, $\boldsymbol{\lambda}$ est un vecteur de taille $d$ et $\boldsymbol{X}$ est un vecteur aléatoire de loi elliptique. Plus précisément on suppose que $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{Z}$ où $\boldsymbol{c}$ est un vecteur de taille $d$, $\boldsymbol{D}$ est une matrice $d \times k$ et $\boldsymbol{Z}$ est de loi sphérique dont les marginales possèdent la fonction de répartition $F$.

   Remarquer que $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{D} \neq 0$, et écrire $F_Y^-(\alpha)$ en fonction de $g$, $F^-(\alpha)$, $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{D}$.

   *Rappelons qu'un vecteur $\boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_k)$ est de loi dite sphérique si pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^k$, $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{Z}$ a la même loi que $\sqrt{\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{\lambda}}Z_1$.*

Si $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{D}$ était nul, $\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{X}$ serait constant et le support de la loi de $Y$ ne pourrait être de la forme $]c, \infty[$. Remarquons également que l'inverse de $g$ est une fonction croissante de $]c, \infty[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x > c$, on a

$$\begin{aligned} F_Y^-(\alpha) \leq x & \Leftrightarrow \alpha \leq P\left(\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{Z} \leq g^{-1}(x)\right) \\ & \Leftrightarrow \alpha \leq P\left(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{\lambda}}\, Z_1 \leq g^{-1}(x) - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{c}\right) \\ & \Leftrightarrow F^-(\alpha) \leq \left\{g^{-1}(x) - \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{c}\right\} / \sqrt{\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{\lambda}} \\ & \Leftrightarrow g\left((\sqrt{\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{\lambda}}\, F^-(\alpha) + \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{c}\right) \leq x, \end{aligned}$$

d'où

$$F_Y^-(\alpha) \quad = \quad g\left((\sqrt{\boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{\lambda}}\, F^-(\alpha) + \boldsymbol{\lambda}'\boldsymbol{c}\right).$$

**Exercice 2 :** Soit un portefeuille de valeur $V_t > 0$ et la perte $L_{t,t+h} = V_t - V_{t+h}$ à horizon $h \geq 1$. Sachant l'information disponible à la date $t$, on suppose que $L_{t,t+h}$ suit une loi de fonction de répartition continue et strictement croissante. La valeur à risque associée à la perte $L_{t,t+h}$ et au niveau $\alpha \in ]0,1[$ est notée $\mathrm{VaR}_{t,h}(\alpha)$ (elle est définie comme le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de $L_{t,t+h}$). On note également $\epsilon_t = \log V_t/V_{t-1}$, $\boldsymbol{\epsilon}_{t,h} = (\epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h})'$ et $q_{t,h}(\alpha)$ le quantile d'ordre $\alpha$ de $\sum_{i=1}^h \epsilon_{t+i}$.

1. Exprimer $\mathrm{VaR}_{t,h}(\alpha)$ en fonction de $V_t$ et de $q_{t,h}(\alpha)$.

   On a
   $$L_{t,t+h} = V_t\left(1 - e^{\sum_{i=1}^h \epsilon_{t+i}}\right),$$
   donc
   $$\mathrm{VaR}_{t,h}(\alpha) = V_t\left\{1 - e^{q_{t,h}(\alpha)}\right\}$$
   d'après le question 2 de l'exercice 1.

2. On suppose dans cette question que la loi de $\boldsymbol{\epsilon}_{t,h}$ est sphérique.

   (a) Exprimer $q_{t,h}(\alpha)$ en fonction de $q_{t,1}(\alpha)$ et de $h$.

   Soit $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)' \in \mathbb{R}^h$. La loi de $\boldsymbol{\epsilon}_{t,h}$ étant sphérique, la loi de $\sum_{i=1}^h \epsilon_{t+i} = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{\epsilon}_{t,h}$ est la même que celle de $\|\boldsymbol{e}\|\epsilon_{t+1} = \sqrt{h}\epsilon_{t+1}$. On a donc $q_{t,h}(\alpha) = \sqrt{h} q_{t,1}(\alpha)$.

(b) Justifier l'approximation

$$\mathrm{VaR}_{t,h}(\alpha) \simeq \sqrt{h}\mathrm{VaR}_{t,1}(\alpha).$$

Si $\epsilon_t$ est peu dispersée autour de zéro, $q_{t,h}(\alpha)$ est proche de zéro et

$$\mathrm{VaR}_{t,h}(\alpha) \simeq -V_t q_{t,h}(\alpha) = -\sqrt{h} V_t q_{t,1}(\alpha) \simeq \sqrt{h}\mathrm{VaR}_{t,1}(\alpha).$$

3. On suppose dans cette question que les $\epsilon_t$ sont indépendant et de même loi de Cauchy. [1]

   (a) Montrer que $h^{-1}\sum_{i=1}^{h}\epsilon_{t+i}$ suit également la même loi de Cauchy.

   La fonction caractéristique de $h^{-1}\sum_{i=1}^{h}\epsilon_{t+i}$

   $$Ee^{ith^{-1}\sum_{i=1}^{h}\epsilon_{t+i}} = \left(Ee^{ith^{-1}\epsilon_1}\right)^h = \left(e^{|t|/h}\right)^h = e^{-|t|}$$

   est bien celle d'une Cauchy.

   (b) La loi de $\boldsymbol{\epsilon}_{t,h}$ est-elle sphérique ?

   Non car $\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\epsilon}_{t,h} = hh^{-1}\sum_{i=1}^{h}\epsilon_{t+i}$ suit la loi de $h\epsilon_1$ mais pas celle de $\|\boldsymbol{e}\|\epsilon_1 = \sqrt{h}\epsilon_1$, sauf évidemment dans le cas $h = 1$.

   (c) Exprimer $q_{t,h}(\alpha)$ en fonction de $q_{t,1}(\alpha)$ et de $h$. En déduire une approximation $\mathrm{VaR}_{t,h}(\alpha)$ en fonction de $\mathrm{VaR}_{t,1}(\alpha)$ et de $h$. Étendre ce résultat au cas de l'expected shortfall.

   D'après les question précédentes, $q_{t,h}(\alpha) = hq_{t,1}(\alpha)$ et $\mathrm{VaR}_{t,h}(\alpha) \simeq h\mathrm{VaR}_{t,1}(\alpha)$. Puisque $\mathrm{ES}_{t,h}(\alpha) = \alpha^{-1}\int_0^\alpha \mathrm{VaR}_{t,h}(u)du$, on a également $\mathrm{ES}_{t,h}(\alpha) \simeq h\mathrm{ES}_{t,1}(\alpha)$.

4. On suppose que l'on a observé $V_u$ pour $u = 1, \dots, t$. Décrire précisément le calcul d'un estimateur non paramétrique de $\mathrm{VaR}_{t,h}(\alpha)$ fondé sur l'hypothèse que le processus $(\boldsymbol{\epsilon}_{t,h})_t$ est stationnaire et de loi sphérique.

   On peut calculer le $\alpha$-quantile empirique $\hat{q}_1(\alpha)$ des rendements $\epsilon_u$ pour $u = 2, \dots, t$ et poser $\widehat{\mathrm{VaR}}_{t,h}(\alpha) = V_t(1 - e^{\sqrt{h}\hat{q}_1(\alpha)})$.

1. de densité $f_{\epsilon_1}(x) = 1/\left\{\pi(1+x^2)\right\}$ et de fonction caractéristique $Ee^{it\epsilon_1} = \exp(-|t|)$