ENSAE - 3ème année, Master SF

Mesures de risque

Examen 2018-2019

Durée : 2 heures. Sans document.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 (Mesure de risque conforme avec l'ordre stochastique)

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonctions quantiles F_X^- et F_Y^-. On dit que X est stochastiquement dominée par Y, ce que l'on note $X \preceq Y$, si

$$F_X^-(\alpha) \leq F_Y^-(\alpha), \qquad \forall \alpha \in (0,1).$$

On dit qu'une mesure de risque ρ est conforme à l'ordre stochastique si

$$X \preceq Y \text{ implique } \rho(X) \leq \rho(Y).$$

1. Soit 2 positions de fonctions de perte X et Y telles que $X \preceq Y$. Quelle est la position qui semble la plus risquée ? La VaR (valeur à risque) est-elle conforme avec l'ordre stochastique ? Si la perte Y domine stochastiquement la perte X, elle peut être considérée comme plus grande, et la position correspondante devrait être plus risquée. La VaR est en effet conforme à l'ordre stochastique car si $X \preceq Y$ alors $\mathrm{VaR}(X) = F_X^-(1-\alpha) \leq \mathrm{VaR}(Y)$.
2. Considérons un point $\omega_0 \in \Omega$ fixé et la mesure de risque définie par $\rho_0(X) = X(\omega_0)$ pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Cette mesure de risque est-elle cohérente ? Cette mesure de risque est invariante par translation ($\rho_0(X+\ell) = (X+\ell)(\omega_0) = X(\omega_0)+\ell = \rho_0(X)+\ell$), positivement homogène (pour $\lambda \geq 0$, $\rho_0(\lambda X) = \lambda X(\omega_0) = \lambda\rho_0(X)$), sous additive ($\rho_0(X+Y) = (X+Y)(\omega_0) \leq \rho_0(X)+\rho_0(Y)$) et monotone (si $X \leq Y$ p.s. alors $\rho_0(X) = X(\omega_0) \leq Y(\omega_0) = \rho_0(Y)$). Elle est donc cohérente.
3. On suppose $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ avec $P(\{\omega_1\} = 1/3$ et $P(\{\omega_2\} = 2/3$. On pose $X(\omega_1) = 3$, $X(\omega_2) = 1$, $Y(\omega_1) = 2$, $Y(\omega_2) = 4$. Calculer les fonctions quantiles de X et Y. A-t-on $X \preceq Y$? Pour $\alpha \leq 2/3$, on a $F_X^-(\alpha) = \inf(x : P(X \leq x) \geq \alpha) = 1$. Pour $2/3 < \alpha$, on a $F_X^-(\alpha) = 3$. Pour $\alpha \leq 1/3$, on a $F_Y^-(\alpha) = 2$. Pour $1/3 < \alpha$, on a $F_Y^-(\alpha) = 4$. On a bien $X \preceq Y$.

4. Une mesure de perte cohérente est-elle toujours conforme à l'ordre stochastique (indication : considérer la mesure de risque définie au point 2) ? Reprenons l'exemple précédent avec $\rho_1(X) = X(\omega_1) = 3$ et $\rho_1(Y) = Y(\omega_1) = 2$. Les questions précédentes montrent que la mesure de risque ρ_1 est cohérente mais n'est pas conforme à l'ordre stochastique.
5. On suppose qu'il existe une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer qu'une mesure de risque monotone et invariante en loi (*i.e.* si X et Y ont même loi, alors elles ont le même risque) définie sur toutes les variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est conforme à l'ordre stochastique. Ce résultat est-il en contradiction avec celui de la question précédente ? Si $X \preceq Y$, toute mesure de risque ρ monotone et invariante en loi satisfait $\rho(X) = \rho(F_X^-(U)) \leq \rho(F_Y^-(U)) = \rho(Y)$, et est donc conforme à l'ordre stochastique. Ceci n'est pas en contradiction avec la question précédente car on a supposé l'existence de U définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice 2 (DRM marginale ou conditionnelle) :

Soit une perte qui suit le modèle de série temporelle

$$L_t = m_t + \epsilon_t,$$

où m_t et ϵ_t sont indépendants et, respectivement, de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_m^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$. Soit $\mathcal{F}_{t-1}$ l'information contenue dans le passé de L_t, c'est-à-dire la tribu engendrée par $\{L_{t-1}, L_{t-2}, \ldots\}$. On suppose que m_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable, et que ϵ_t est indépendant de $\mathcal{F}_{t-1}$. Soit G une fonction de distorsion de risque, c'est-à-dire une fonction de répartition (f.d.r.) sur $[0, 1]$. Rappelons que la DRM d'une perte de f.d.r. F_0 est définie par

$$r(F_0, G) = \int_0^1 F_0^{-1}(1 - u) dG(u).$$

On note Φ la f.d.r. d'une $\mathcal{N}(0, 1)$, F la f.d.r. de la loi marginale de L_t et F_t la f.d.r. de la loi conditionnelle de L_t sachant $\mathcal{F}_{t-1}$.

1. Montrer que pour des fonctions de distorsion G satisfaisant une certaine condition de régularité à préciser on a $r(\Phi, G) > 0$. Si G charge davantage les petites valeurs de u (c'est-à-dire les risques extrêmes),

par exemple G à densité g décroissante sur $[0,1]$ ou plus généralement $dG(u) \geq dG(1-u)$ pour tout $u \in [0,1/2]$), alors

$$r(\Phi, G) = \int_0^{1/2} \Phi^{-1}(1-u)dG(u) + \int_0^{1/2} \Phi^{-1}(u)dG(1-u) > 0$$

car $\Phi^{-1}(1-u) = -\Phi^{-1}(u) > 0$ pour $u \in (0,1/2]$.

2. Calculer $r(\Phi, G_\alpha)$ lorsque G_α est la f.d.r. de la loi uniforme sur $[0,\alpha]$. Dans ce cas, en posant $v = \Phi^{-1}(1-u)$ on a

$$r(\Phi, G_\alpha) = \frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \Phi^{-1}(1-u)du = \frac{1}{\alpha}\int_{\Phi^{-1}(1-\alpha)}^{\infty} v\phi(v)dv = \frac{1}{\alpha}\phi(\Phi^{-1}(1-\alpha)),$$

c'est-à-dire l'expected shortfall de la loi normale standard.

3. Exprimer $r(F,G)$ en fonction de $\sigma_m^2 + \sigma_\epsilon^2$ et de $r(\Phi, G)$. Exprimer $r(F_t, G)$ en fonction de m_t σ_ϵ^2 et de $r(\Phi, G)$. Comme $F \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_\epsilon^2}\Phi$ et $F_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} m_t + \sigma_\epsilon \Phi$, on a

$$r(F,G) = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_\epsilon^2}\, r(\Phi, G), \quad r(F_t, G) = m_t + \sigma_\epsilon r(\Phi, G)$$

4. Comparer $r(F,G)$ et l'espérance de $r(F_t, G)$. Que peut-on en conclure ? Lorsque $r(\Phi, G) > 0$, on a

$$r(F,G) > E\left(r(F_t, G)\right) = \sigma_\epsilon r(\Phi, G)$$

donc la perte conditionnelle est en moyenne avantageuse en terme de risque mesuré par DRM.

5. A-t-on le même type de conclusion lorsque le couple (m_t, ϵ_t) a une loi elliptique ? Si $(m_t, \epsilon_t)' \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mu + AY$ où $Y = (Y_1, Y_2)'$ est de loi sphérique alors, avec des notations évidentes,

$$F \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mu_1 + \mu_2 + \|(1,1)A\|Y_1, \quad F_t \stackrel{\mathcal{L}}{=} m_t + \mu_2 + \|(0,1)A\|Y_1.$$