ENSAE - 3ème année

MESURES DE RISQUE
Examen 2017-2018
Durée : 2 heures. Sans document.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1 (VaR marginale ou conditionnelle) :
Soit une perte qui suit le modèle de série temporelle

$$L_t = m_t + \epsilon_t,$$

où m_t et ϵ_t sont indépendants et, respectivement, de loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_m^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2)$. Soit $\mathcal{F}_{t-1}$ l'information contenue dans le passé de L_t, c'est-à-dire la tribu engendrée par $\{L_{t-1}, L_{t-2}, \dots\}$. On suppose que m_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable, et que ϵ_t est indépendant de $\mathcal{F}_{t-1}$.

1. Quelle est la loi de L_t ?
2. Au niveau $\alpha \in (0,1)$, quelle est la valeur à risque marginale $\mathrm{VaR}(\alpha)$ de L_t ?
3. Au niveau $\alpha \in (0,1)$, quelle est la valeur à risque conditionnelle $\mathrm{VaR}_{t|t-1}(\alpha)$ de L_t sachant le passé $\mathcal{F}_{t-1}$?
4. Comparer $E\left\{\mathrm{VaR}_{t|t-1}(\alpha)\right\}$ et $\mathrm{VaR}(\alpha)$.
5. Soit η une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, de densité ϕ et de fdr Φ. Montrer que

$$E(\eta|\eta > \Phi(1-\alpha)) = \frac{1}{\alpha}\phi\left(\Phi^{-1}(1-\alpha)\right).$$

   Comparer

$$E\left\{L_t - \mathrm{VaR}_{t|t-1}(\alpha) \mid L_t > \mathrm{VaR}_{t|t-1}(\alpha)\right\}$$

   et

$$E\left\{L_t - \mathrm{VaR}(\alpha) \mid L_t > \mathrm{VaR}(\alpha)\right\}.$$

6. Conclure que la valeur à risque conditionnelle est en général plus avantageuse que la valeur à risque marginale.

Exercice 2 (Utiliser l'équivariance pour estimer un quantile)
Soit X une variable aléatoire *positive* dont on veut déterminer le quantile d'ordre α, $\xi_\alpha = \inf\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\}$, pour $\alpha \in (0,1)$ grand. On pose $X^* = 1/X$ et on note $\xi^*_{1-\alpha}$ le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi de X^*. Comme la distribution de X^* est souvent plus concentrée autour de zéro que celle de

X autour de grandes valeurs, un article de recherche[1] suggère d'estimer ξ_α en prenant l'inverse d'un estimateur de $\xi^*_{1-\alpha}$. Le but de l'exercice est d'étudier cette méthode.

On note $\xi_{n,\alpha}$ le quantile empirique d'ordre α d'un échantillon $X_1, \ldots, X_n$ de la loi de X, et on note $\xi^*_{n,1-\alpha}$ le quantile empirique d'ordre $1-\alpha$ de

$$X_1^* = \frac{1}{X_1}, \ldots, X_n^* = \frac{1}{X_n}.$$

On suppose que la loi de X est à densité f strictement positive sur $(0, \infty)$. La fonction de répartition F de X est alors inversible sur $(0, \infty)$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $F^{-1}(\alpha) \leq x$ si et seulement si $1/x \leq \xi^*_{1-\alpha}$. En déduire que
$$\xi_\alpha = \frac{1}{\xi^*_{1-\alpha}}$$
2. Un échantillon de taille $n = 5$ de la loi X donne
$$X_1 = 9.5,\ X_2 = 12.1,\ X_3 = 2.3,\ X_4 = 6.1,\ X_5 = 1.8$$
Pour $\alpha = 90\%$ et $\alpha = 80\%$, déterminer la valeur numérique de $\xi_{n,\alpha}$ et $1/\xi^*_{n,1-\alpha}$. Commenter le résultat.
3. Soit F_n la fonction de répartition empirique de $X_1, \ldots, X_n$. Pour $x > 0$ fixé, donner la loi asymptotique de
$$\sqrt{n}\left\{F_n(x) - F(x)\right\}.$$
En admettant que le résultat reste valable en remplaçant x par une suite (x_n) qui tend vers x, en déduire la loi de asymptotique de
$$\sqrt{n}\left\{F_n(\xi_{n,\alpha}) - F(\xi_{n,\alpha})\right\} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}\left\{F(\xi_{n,\alpha}) - \alpha\right\}.$$
4. Déterminer $g'(\alpha)$ lorsque $g(x) = F^{-1}(x)$. En déduire la loi de asymptotique de
$$\sqrt{n}\left\{\xi_{n,\alpha} - \xi_\alpha\right\}.$$
5. Déterminer la densité de X^* et la loi asymptotique de
$$\sqrt{n}\left\{\xi^*_{n,1-\alpha} - \xi^*_{1-\alpha}\right\},$$
puis celle de
$$\sqrt{n}\left\{\frac{1}{\xi^*_{n,1-\alpha}} - \xi_\alpha\right\}.$$
Conclure sur l'intérêt de la méthode proposée.

1. voir les équations (10) et (11) dans Lobato, I. N. (2001). Testing that a dependent process is uncorrelated. Journal of the American Statistical Association, 96 1066–1076.